УДК 620.174.05+004.942

ПРИЛОЖЕНИЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОГО ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

*Мартиросян Микаэл Дереникович, студент1,  
 martirosyan-mikael@yandex.ru*

*1НИУ МЭИ, г.Москва*

Аннотация: В данной работе был проведён статистический анализ результатов эксперимента по двухточечному изгибу многослойного стержня, в качестве которого использовалось оптическое волокно с заданными параметрами. Каждый параметр модели был оценен трижды с помощью методов наименьших квадратов, моментов и максимального правдоподобия. Высказанная в предыдущих работах гипотеза о наибольшей применимости распределения Вейбулла для объяснения результатов этого эксперимента была опровергнута: гамма-распределение может применяться с весьма хорошим успехом, оно также значительно снижает общую дисперсию распределения при использовании оценок максимального правдоподобия.

Ключевые слова: гамма-распределение, предел прочности, эксперимент, оценка максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов.

Введение

Перед построением модели стоит обозначить условия эксперимента: эксперимент производился с помощью прибора, измеряющего предел прочности многослойных стержней методом двухточечного изгиба, в ходе него были измерены три типа оптических волокон как примеров многослойных стержней. Волокно не контактировало с какими-либо средами, кроме атмосферного воздуха и стальных пластин прибора, целостность его покрытия не нарушалась, в трёх сериях было совершено 30 измерений. Ниже можно увидеть геометрические характеристики волокон:

1. Волокно диаметром 125 мкм с полимерным покрытием толщиной 42.5 мкм.
2. Волокно с диаметром оболочки 125 мкм и диаметром сердечника 62.5 мкм с полиимидным покрытием толщиной 10 мкм.
3. Волокно с диаметром сердечника составляет 160 мкм и диаметром оболочки 390 мкм с медным покрытием толщиной 40 мкм.

Методология построения модели

Для статистической модели находились значения математического ожидания, медианы, несмещённой дисперсии и среднеквадратическое отклонение для оценок, произведённых методом наименьших квадратов. Для их нахождения были применены метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия и метод моментов. Была оценена правдоподобность гипотезы о виде распределения с помощью критерия Пирсона (см. источник [1]), эта оценка давала широкий запас под изменяемость данных, разница с пороговым значением критерия была более 5 для всех типов. Все оценённые величины смогли пройти интервалы с уровнем значимости 0.99. Формулы для осуществления метода моментов были взяты из источника [2], оценки для параметра математического ожидания методом максимального правдоподобия была взята из источника [3]. Важно помнить о приближённом характере вычисления медианы – либо с помощью асимптотических приближений, как в работе [4], либо с помощью обратной функции гамма-распределения, как в данной работе.

Для оценок максимального правдоподобия использовались нижеприведённые формулы. Формула (2) рекомендуется к применению нормативным документом [5], нелинейное уравнение (1) решалось методом секущих, но лучше бы подошёл метод Ньютона из-за большего порядка сходимости (см. книгу [6]) и сокращения суммы в производной по параметру формы. Формулы (1) и (2):





**где *N* – количество случайных значений в выборке, *Xi* – значение случайной величины,** *k* и *θ* – параметры формы и масштаба гамма-распределения соответственно, *Ψ* – пси-функция Эйлера или дигамма-функция, подробнее см. источник [7] и *X̅* – среднее случайной величины X, рассчитанное по соответствующей выборке.

Выводы

Настоящая статистическая модель проста в реализации, достаточно точна (максимальное относительное отклонение составляет 0.0384), надёжна относительно небольших (не более 1 ГПа в восьмой-шестой части выборки) искажений данных, что делает её отличным выбором для прикладного применения вместе с прибором, реализующим двухточечный изгиб многослойных стержней в обычных условиях и является хорошей альтернативой ставшему традиционным распределению Вейбулла.

Список использованных источников

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* / Введение в математическую статистику: Учебник. М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 600 с.
2. Continuous univariate distributions / N.L. Johnson. S. Kotz. N. Balakrishanan. – 2nd ed. Vol. 1. NY: John Willey & Sons, 1994.
3. Е.А. Буровский, Ю.Б. Гришунина / Задачи математической статистики и их решение с использованием языка программирования Python: учеб. Пособие. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. — 64 с.
4. Lyon R.F. // PLOS ONE. 2023. V. 18: e0288601. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0288601>
5. ГОСТ 11.011—83. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения.
6. *Крылов В.И.* и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. Под ред. *И.П. Мысовских*. Минск, «Вышэйшая Школа», 1972. – 584 с., с илл.
7. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. «Физматгиз», 1963. – 1100 с., с илл.

APPLICATION OF GAMMA DISTRIBUTION TO MODELING THE TWO-POINT BENDING OF A MULTILAYER ROD

M.D.Martirosyan

Abstract: In this paper, a statistical analysis of the results from an experiment involving the two-point bending of a multi-layer rod using an optical fiber with specific parameters was conducted. Each parameter of the model was evaluated three times three times using method of least squares, method of moments, and maximum likelihood estimations. The hypothesis proposed in previous studies about the supremacy of the Weibull distribution for explaining the results of this experiment was refuted. Instead, the gamma distribution was found to be a suitable option too, as it significantly reduces the overall variance in the distribution when maximum likelihood estimates are used.

Key words: gamma-distribution, ultimate strength, experiment, maximum likelihood estimation, method of moments, least squares method.